

Interazione tra forze verticali e longitudinali: effetti “anti”

5.5 aggiornato 19-11-2013

Nel piano frontale si studia l'interazione tra forze verticali F_z e forze laterali F_y sviluppate a livello dell'impronta a terra. Tale interazione è legata al cinematismo della sospensione, e in particolare alla posizione del Centro di Rollio.

In modo analogo, nel piano laterale si studia l'interazione tra F_z e le forze longitudinali F_x , altrettanto legata alle caratteristiche cinematiche della sospensione.

Definizioni

m	massa vettura
h_{CG}	altezza baricentro vettura da terra
h_{CB}	altezza Centro di Beccheggio da terra
$h_{CIR} = q$	altezza CIR sospensione da terra
l	passo
e	distanza CIR sospensione dal piano verticale passante per il punto a terra
α	inclinazione della retta d'azione
δ	inclinazione della risultante su ostacolo a gradino
d	altezza dell'ostacolo a gradino
R	ripartizione di frenata
r	raggio ruota
M	momento agente sul braccio sospensione
ΔF_z	trasferimento di carico longitudinale
F_x	forza longitudinale di frenata o accelerazione
Δz	scuotimento ruota
Δx	variazione di passo (spazzolamento longitudinale)

Frenata: equilibrio vettura

Le forze longitudinali di frenata F_x vengono ripartite tra gli assi in funzione della ripartizione

$$R = F_{XP} / F_{XA} \quad (A)$$

come nello studio della cosiddetta *zona delle ripartizioni ammissibili* in dinamica longitudinale. Se invece la ripartizione viene espressa in percentuale:

$$R_{\%} = \frac{F_{XA}}{F_{XA} + F_{XP}}$$

vale la relazione*

$$R = \frac{1 - R_{\%}}{R_{\%}}$$

Per l'equilibrio longitudinale vale la

$$m \cdot a_x = F_{XA} + F_{XP} \quad (B)$$

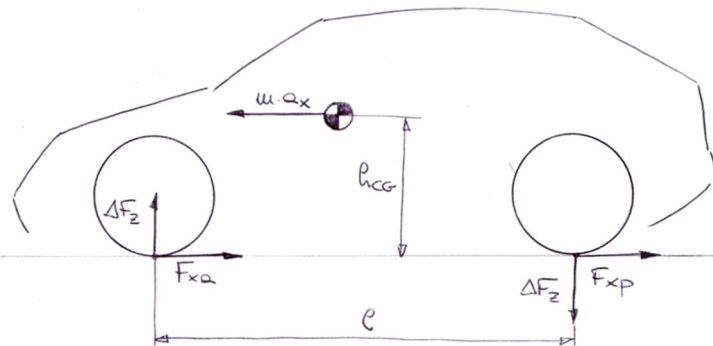
Sostituendo (A) in (B):

$$m \cdot a_x = F_{XA} + F_{XA} \cdot R$$

$$F_{XA} = \frac{m \cdot a_x}{(1 + R)} \quad (C)$$

$$F_{XP} = F_{XA} \cdot R = \frac{m \cdot a_x}{(1 + R)} \cdot R \quad (D)$$

La forza d'inerzia applicata al baricentro determina un trasferimento di carico longitudinale:



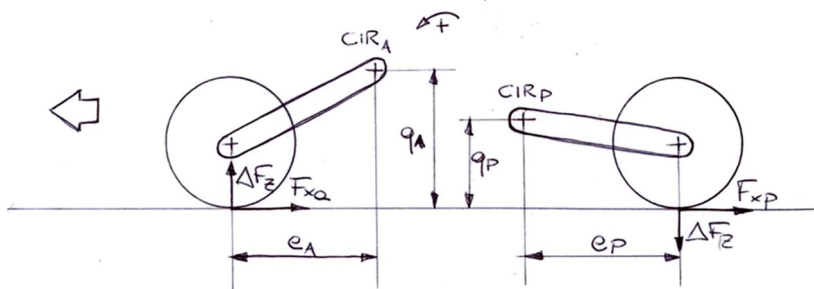
$$\Delta F_z = \frac{m \cdot a_x \cdot h_{CG}}{l} \quad (E)$$

ove il peso statico della vettura viene equilibrato dalle azioni delle molle; entrambi i termini non compaiono per comodità.

Il trasferimento di carico longitudinale va dunque a comprimere la sospensione anteriore ed estendere quella posteriore, generando beccheggio.

Frenata: equilibrio delle singole sospensioni

Normalmente i termini proporzionali a ΔF_z prevalgono, ed il beccheggio avviene come sopra descritto. Tuttavia, anche nel piano laterale si può ipotizzare la presenza di un Centro di Istantanea Rotazione (CIR) per ciascuna sospensione.



Calcolando i momenti agenti sui bracci rispetto al CIR, rispettivamente per la sospensione anteriore e per la posteriore:

$$M_A = F_{XA} \cdot q_A - \Delta F_z \cdot e_A \quad (F)$$

$$M_P = F_{XP} \cdot q_P - \Delta F_z \cdot e_P \quad (G)$$

I momenti proporzionali a ΔF_z tendono a comprimere la sospensione anteriore ed estendere quella posteriore, generando quindi beccheggio. I momenti proporzionali alle F_x agiscono invece con verso opposto: la forza di frenata anteriore tende ad estendere la sospensione, quella posteriore tende a comprimerla, contrastando così il beccheggio.

Tali effetti vengono chiamati *Anti-Dive* (anti-affondamento, per la sospensione anteriore) ed *Anti-Lift* (anti-sollevamento, per la sospensione posteriore). Progettando opportunamente la cinematica delle sospensioni è quindi possibile sfruttare gli effetti “anti” per limitare o addirittura annullare il beccheggio conseguente al trasferimento di carico longitudinale.

Sostituendo (C) ed (E) in (F) l'equazione di equilibrio si può scrivere

$$M_A = \frac{m \cdot a_x}{(1+R)} \cdot q_A - \frac{m \cdot a_x \cdot h_{CG}}{l} \cdot e_A = m \cdot a_x \left(\frac{1}{(1+R)} \cdot q_A - \frac{h_{CG}}{l} \cdot e_A \right)$$

e per la ruota posteriore, sostituendo (D) ed (E) l'equilibrio (G) diviene

$$M_P = m \cdot a_x \left(\frac{R}{(1+R)} \cdot q_P - \frac{h_{CG}}{l} \cdot e_P \right)$$

Ove M_A ed M_P vengono equilibrati dalle molle di ciascuna sospensione.

Retta d'azione anteriore ed effetto *AntiDive* in frenata

L'angolo di inclinazione della retta d'azione si definisce anche *angolo di AntiDive*:

$$\alpha_{antidive} = \arctan \left(\frac{q_A}{e_A} \right)$$

Nel caso in cui la retta d'azione sia orizzontale ($q_A = 0$ oppure $e_A = \infty$) non si ha effetto *AntiDive*:

$$\alpha_{0\% antidive} = 0$$

mentre se

$$M_A = F_{XA} \cdot q_A - \Delta F_Z \cdot e_A = 0$$

la sospensione anteriore non si comprime ed il muso non affonda. Tale caso si definisce come *AntiDive* = 100% e si verifica quando

$$\frac{1}{(1+R)} \cdot q_A = \frac{h_{CG}}{l} \cdot e_A$$

$$\frac{q_A}{e_A} = \frac{h_{CG}(1+R)}{l}$$

con

$$\alpha_{100\% antidive} = \arctan \left(\frac{h_{CG}(1+R)}{l} \right)$$

La retta d'azione in questo caso è il luogo dei CIR che annullano l'affondamento della sospensione anteriore in frenata.

Si definisce la percentuale di *AntiDive* anteriore come

$$AntiDive\% = \frac{\alpha_{antidive}}{\alpha_{100\% antidive}}$$

Retta d'azione posteriore ed effetto *AntiLift* in frenata

In questo caso si parla di *angolo di AntiLift*:

$$\alpha_{antilift} = \arctan\left(\frac{q_P}{e_P}\right)$$

Nel caso in cui la retta d'azione sia orizzontale ($q_P = 0$ oppure $e_P = \infty$) non si ha effetto *AntiLift*:

$$\alpha_{0\% antilift} = 0$$

mentre se

$$M_P = F_{XP} \cdot q_P - \Delta F_Z \cdot e_P = 0$$

la sospensione posteriore non si estende e la coda non si alza. Tale caso si definisce come *AntiLift* = 100% e si verifica quando

$$\frac{R}{(1+R)} \cdot q_P = \frac{h_{CG}}{l} \cdot e_P$$

$$\frac{q_P}{e_P} = \frac{h_{CG}(1+R)}{l \cdot R}$$

con

$$\alpha_{100\% antilift} = \arctan\left(\frac{h_{CG}(1+R)}{l \cdot R}\right)$$

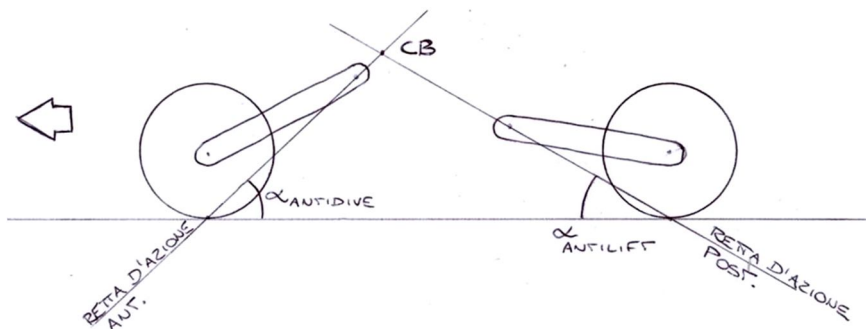
La retta d'azione in questo caso è il luogo dei CIR che annullano il sollevamento della sospensione posteriore in frenata.

Si definisce la percentuale di *AntiLift* posteriore come

$$AntiLift\% = \frac{\alpha_{antilift}}{\alpha_{100\% antilift}}$$

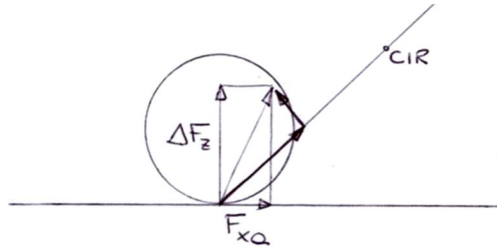
Il Centro di Beccheggio in frenata

In modo del tutto analogo al Centro di Rollio, grazie al *Teorema di Chasles* è possibile definire l'intersezione delle rette d'azione anteriore e posteriore come *Centro di Beccheggio* (CB), ovvero il Centro di Istantanea Rotazione della massa sospesa (o scocca, cassa vettura, telaio...) rispetto al suolo durante il beccheggio. La risultante delle forze longitudinali di frenata è applicata alla scocca nel CB.



Su ciascuna ruota, la risultante delle forze a terra si può anche scomporre sulla retta d'azione:

- una componente perpendicolare alla retta d'azione, che genera momento attorno al CIR e “passa” attraverso la molla, o meglio viene equilibrata dall'azione dei componenti elastici della sospensione
- una componente lungo la retta d'azione, che viene trasmessa rigidamente alla massa sospesa attraverso i bracci della sospensione

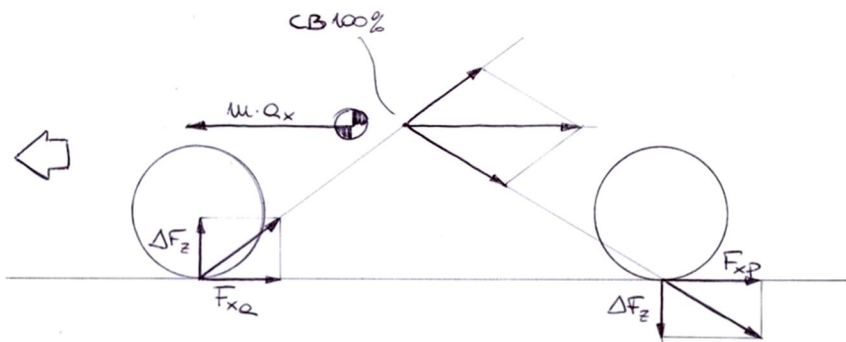


Adottando geometria anteriore con *AntiDive* 100% la risultante delle forze a terra è allineata con la retta d'azione, e viene trasmessa alla massa sospesa interamente tramite il cinematismo. In altre parole, in frenata la sospensione diventa rigida e la molla non si comprime.

Adottando geometrie con *AntiDive* 100% ed *AntiLift* 100% il beccheggio in frenata si annulla. In questo caso il CB è alla quota del baricentro:

$$h_{CB100\%} = h_{CG}$$

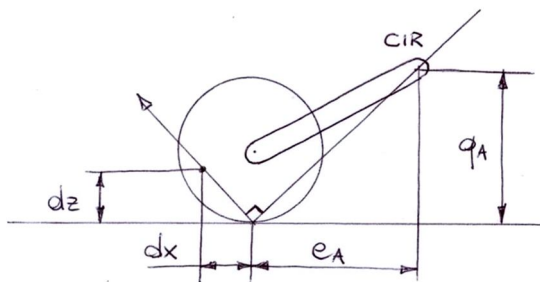
e la risultante delle forze di frenata non genera momento di beccheggio:



Qualora anche solo una sospensione abbia effetto “anti” = 0 il CB è a livello del terreno.

Suspension derivatives: variazione di passo a scuotimento

L'effetto antidive si può descrivere con l'espressione basata sui triangoli simili:



$$\frac{dx}{dz} = \frac{q_A}{e_A}$$

ATTENZIONE! per scuotimenti positivi, al di là delle convenzioni di segno:

- all'anteriore, se *AntiDive*% > 0 il punto a terra si sposta in avanti
- al posteriore, se *AntiLift*% > 0 il punto a terra si sposta indietro

La variazione di passo (equivalente allo spazzolamento in direzione longitudinale) è quindi proporzionale alla percentuale di effetto “anti” ed è in direzione perpendicolare alla retta d'azione.

Accelerazione ed effetti “anti”

Il trasferimento di carico longitudinale generato dalle forze di trazione va ad estendere la sospensione anteriore e comprimere quella posteriore, generando beccheggio.

Per le vetture a trazione integrale valgono considerazioni analoghe alle precedenti, ove alla ripartizione di frenata R si sostituisce la ripartizione di coppia tra gli assi R_m . In questo caso però, al posto di

$$R_m = F_{XP} / F_{XA}$$

è più comodo usare

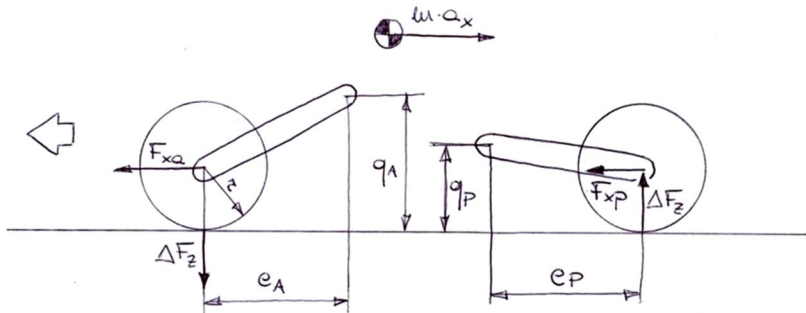
$$R_{m\%} = \frac{F_{XP}}{F_{XA} + F_{XP}} = \frac{F_{XP}}{m \cdot a_x}$$

da cui

$$F_{XP} = R_{m\%} \cdot m \cdot a_x$$

$$F_{XA} = m \cdot a_x (1 - R_{m\%})$$

In accelerazione la sospensione vede la forza F_X traente applicata al centro ruota, e non a livello del terreno. La retta d'azione passa quindi per il centro ruota ed il CIR:



A differenza del caso di frenata infatti la sospensione vede solo la forza longitudinale e non la coppia di trasporto, ovvero la coppia motrice, che viene direttamente trasmessa alla ruota dal gruppo differenziale mediante il semiasse e non passa per i bracci della sospensione. Ciò vale anche in frenata, qualora i freni siano entrobordo (pinze freno montate sulla massa sospesa e non sul portamozzo).

Calcolando nuovamente i momenti agenti sui bracci rispetto al CIR, rispettivamente per la sospensione anteriore e per la posteriore:

$$M_A = -F_{XA} \cdot (q_A - r) + \Delta F_Z \cdot e_A$$

$$M_P = -F_{XP} \cdot (q_P - r) + \Delta F_Z \cdot e_P$$

Da cui

$$M_A = m \cdot a_x \left(-(1 - R_{m\%}) \cdot (q_A - r) + \frac{h_{CG}}{l} \cdot e_A \right)$$

$$M_P = m \cdot a_x \left(-R_{m\%} (q_P - r) + \frac{h_{CG}}{l} \cdot e_P \right)$$

Per l'asse anteriore in accelerazione si parla di geometria o effetto *AntiLift*, che contrasta la tendenza al sollevamento del muso:

$$\alpha_{antilift} = \arctan\left(\frac{q_A - r}{e_A}\right)$$

$$\alpha_{100\%antilift} = \arctan\left(\frac{h_{CG}}{l \cdot (1 - R_{m\%})}\right)$$

mentre per il posteriore si parla di geometria *AntiSquat*, che contrasta la tendenza della coda ad abbassarsi:

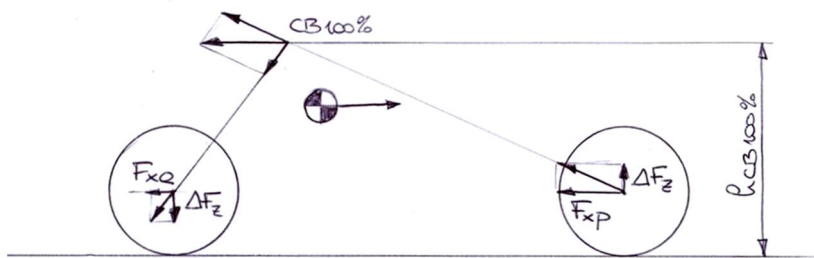
$$\alpha_{antisquat} = \arctan\left(\frac{q_P - r}{e_P}\right)$$

$$\alpha_{100\%antisquat} = \arctan\left(\frac{h_{CG}}{l \cdot R_{m\%}}\right)$$

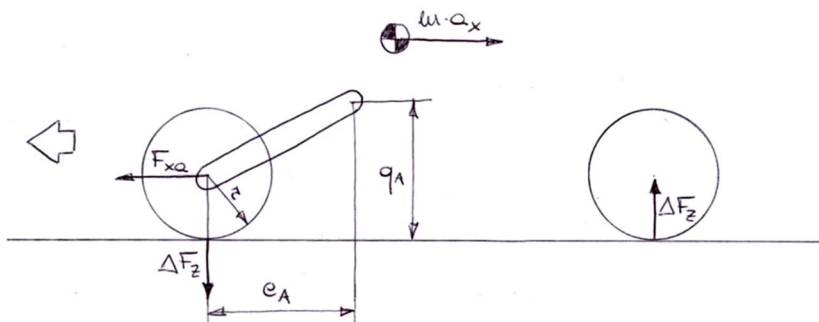
Analogamente al caso di frenata, adottando entrambe le geometrie con effetto *Anti* pari al 100% il beccheggio in accelerazione si annulla. In questo caso però il Centro di Beccheggio è a quota

$$h_{CB100\%} = h_{CG} + r$$

e la risultante delle forze di accelerazione genera un momento di beccheggio bilanciato dalla reazione alla coppia motrice, che viene “vista” direttamente dalla massa sospesa.



Normalmente però la trazione è presente su un asse solo. Sull'asse non traente, in assenza di forze longitudinali non è possibile generare alcun effetto “anti”. Ad esempio, per una trazione anteriore:



$$R_{m\%} = \frac{F_{XP}}{F_{XA} + F_{XP}} = 0$$

$$\alpha_{100\%antilift} = \arctan\left(\frac{h_{CG}}{l}\right)$$

e non esiste alcun effetto *AntiSquat*, mentre per una trazione posteriore:

$$R_{m\%} = 1$$

$$\alpha_{100\% \text{ antisquat}} = \arctan\left(\frac{h_{CG}}{l}\right)$$

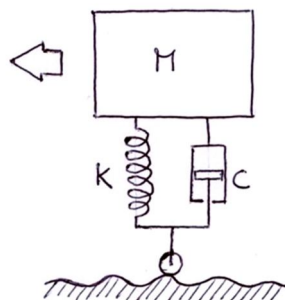
e non esiste alcun effetto *Antilift*.

Effetti “anti”, dinamica verticale e comfort

E' intuitivo comprendere come l'interazione tra forze longitudinali F_x e verticali F_z legata alle geometrie “anti” abbia un impatto sulla rigidità verticale effettiva “a terra” delle sospensioni. Un'elevata percentuale *AntiDive* all'anteriore rende di fatto la sospensione più rigida durante la frenata, limitandone la capacità di filtrare le irregolarità del fondo stradale e peggiorando il comfort. Un'elevata percentuale *AntiLift* al posteriore, al contrario, può migliorare il comfort. Ciò è intuibile anche osservando la variazione di passo a scuotimento. Per questo motivo, per limitare il beccheggio in frenata talvolta si adottano percentuali di *AntiDive* limitate all'anteriore, e percentuali di *AntiLift* elevate (anche > 100%) al posteriore.

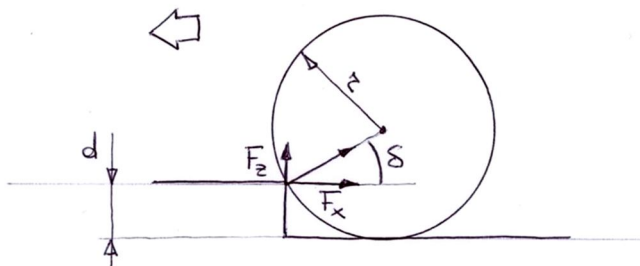
Superamento di ostacolo

Un ostacolo di altezza d impone alla ruota –e attraverso la sospensione, alla massa sospesa- una forza e di conseguenza un'accelerazione verticale proporzionale a d ed alla velocità del veicolo. Ciò è intuitivo e viene affrontato durante lo studio della dinamica verticale o *ride* con modelli tradizionali del tipo massa-molla-smorzatore, vedi figura sotto.



In questa sede viene piuttosto discussa l'influenza della geometria della sospensione -nonché del raggio ruota- sulla trasmissione dei disturbi legati alle irregolarità stradali verso la massa sospesa e gli occupanti della vettura.

Consideriamo ad esempio la ruota anteriore, di raggio r :



L'ostacolo applica una forza F alla ruota in direzione radiale (altrimenti genererebbe coppia). La componente verticale tende a sollevare la ruota e comprimere la sospensione, favorendo l'assorbimento del gradino attraverso le azioni di molla ed ammortizzatore, mentre la componente longitudinale viene

trasmessa alla scocca attraverso il cinematismo della sospensione (rigido) ed eventualmente filtrata mediante le caratteristiche elastocinematiche di cedevolezza longitudinale o *compliance*:

$$F_z = F \cdot \sin \delta$$

$$F_x = F \cdot \cos \delta$$

ove

$$d = r \cdot (1 - \sin \delta)$$

da cui

$$\delta = \arcsin \left(1 - \frac{d}{r} \right) \quad \text{con} \quad 0 \leq d < r$$

Un gradino d di altezza ridotta viene filtrato agevolmente dalla sospensione, mentre a parità di d , ruote grandi favoriscono l'assorbimento delle asperità stradali riducendo anche la trasmissione di disturbi in direzione longitudinale:

$$\frac{d}{r} \approx 0$$

$$\delta \cong 90^\circ$$

$$F_z \cong F$$

$$F_x \cong 0$$

Mentre un gradino importante, oppure un raggio ruota ridotto, oltre ad imprimere necessariamente accelerazioni verticali elevate, trasmette un sensibile disturbo longitudinale:

$$d \approx r$$

$$\delta \cong 0^\circ$$

$$F_z \cong 0$$

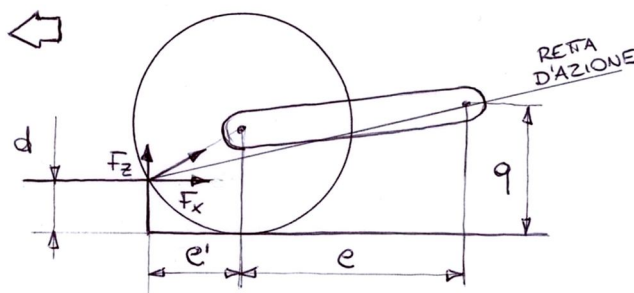
$$F_x \cong F$$

Superamento di ostacolo a gradino con geometria anteriore *Antidive*

Se non è presente accelerazione longitudinale dovuta a frenata o accelerazione il trasferimento di carico è nullo:

$$\Delta F_z = \frac{m \cdot a_x \cdot h_{CG}}{l} = 0$$

La retta d'azione passa per il bordo del gradino. Considerando la sospensione anteriore, e calcolando i momenti agenti sul braccio sospensione rispetto al CIR:



$$M = F_x \cdot (q - d) - F_z \cdot (e + e')$$

con

$$d = r \cdot (1 - \sin \delta)$$

$$e' = r \cdot \cos \delta$$

Il momento

$$F_z \cdot (e + e')$$

tende a comprimere la sospensione, agevolando l'assorbimento dell'ostacolo e dunque la funzione di filtro che la sospensione è chiamata a svolgere: isolare la massa sospesa dalle irregolarità del fondo stradale.

Il momento

$$F_x \cdot (q - d)$$

tende invece ad estendere la sospensione, rendendola di fatto più rigida sullo sconnesso.

Ricordando la definizione di angolo di *AntiDive*:

$$\alpha_{\text{effettivo}} = \arctan\left(\frac{q}{e}\right)$$

si conclude che all'aumentare della percentuale di *AntiDive* la capacità della sospensione di filtrare le irregolarità del fondo stradale peggiora, e con esso il comfort. Inoltre, a causa della variazione di passo positiva in compressione è necessario prevedere elevata *compliance* longitudinale mediante opportuna progettazione delle caratteristiche elastocinematiche della sospensione.

Al posteriore invece entrambi i momenti tendono a comprimere la sospensione, inoltre la variazione di passo positiva fornisce questa volta una “*compliance*” indipendente dalle caratteristiche elastocinematiche della sospensione. Elevate percentuali di *AntiLift* quindi non pregiudicano o addirittura migliorano il comfort della vettura sullo sconnesso.

Riassunto

E' possibile sfruttare opportunamente la geometria delle sospensioni per limitare il beccheggio della vettura in accelerazione e soprattutto in frenata, situazione in cui l'accelerazione massima è potenzialmente elevata in valore assoluto (spesso superiore a 1G anche per le auto stradali).

Tuttavia, all'anteriore una geometria “anti” spinta rende di fatto la sospensione più rigida in presenza di forze longitudinali di frenata e/o sullo sconnesso, peggiorando la capacità di filtrare le irregolarità del fondo stradale, con conseguenze negative sia sul comfort sia sulla generazione di forze a livello dell'impronta a terra dello pneumatico.

Al posteriore ciò non avviene e si utilizzano percentuali “anti” talora estreme per contrastare il beccheggio in frenata.

Infine, in accelerazione vanno ribaltate le considerazioni sull'interazione tra effetti “anti” e rigidità effettiva della sospensione: ad esempio, una vettura da competizione con geometria *AntiSquat* pari al 100% vedrà annullato l'affondamento della coda in accelerazione con potenziali effetti benefici sulla

stabilità aerodinamica, ed effetti negativi sull'aderenza in quanto la sospensione diventa rigida.

Sulle vetture "normali", le considerazioni analoghe sull'interazione tra forze verticali e longitudinali in accelerazione hanno rilevanza minore per via della potenza motrice di gran lunga inferiore alla potenza frenante disponibile.

***Ripartizione della frenata**

Per passare dalla definizione di R a $R_{\%}$:

$$R = F_{XP} / F_{XA}$$

$$R_{\%} = \frac{F_{XA}}{F_{XA} + F_{XP}}$$

da cui

$$F_{XA} = R_{\%} (F_{XA} + F_{XP})$$

ove sostituendo

$$F_{XP} = R F_{XA}$$

$$F_A = R_{\%} F_A (1 + R)$$

$$1 = R_{\%} (1 + R)$$

infine

$$R_{\%} = \frac{1}{R + 1}$$

ovvero

$$R = \frac{1 - R_{\%}}{R_{\%}}$$